

Estudio comparativo del Cálculo Diferencial en libros de texto italianos, franceses y españoles.

Parte II

Comparative study of Differential Calculus in Italian, French, and Spanish textbooks. Part II.

M. Eugenia Celorrio, M. Victoria Velasco¹

¹ Universidad de Granada, Facultad de Ciencias. Dpto. de Análisis Matemático, 18071, Granada (Spain)

meugeniaceilorrio@correo.ugr.es , vvelasco@ugr.es

Resumen

En este trabajo se hace un estudio comparativo sobre cómo se presenta el Cálculo Diferencial en tres libros de texto que, en Italia, Francia y España, respectivamente, pueden considerarse representativos en el ámbito de los manuales al uso destinados al último curso preuniversitario de la rama de Ciencias. Para ello se han seleccionado los textos que para dicho curso recomiendan tres editoriales muy emblemáticas en los países mencionados. El resultado de nuestro estudio se presenta en dos artículos. En el correspondiente a la Parte I se analizaron los contenidos teóricos, mientras que el que responde a la Parte II, que es el trabajo que ahora nos ocupa, se dedica al estudio comparativo de los ejercicios y tareas.

Palabras Clave

Cálculo diferencial, derivada, libros de texto

Abstract

In this work, a comparative study is achieved to see how the Differential Calculus is developed in three prominent textbooks in Italy, France and Spain for the last pre-university course of the branch of Sciences. To this end, three textbooks have been selected from very representative publishers in the respective mentioned countries. The results of our research are established in two papers. In the corresponding to the Part I, the theoretical contents were analyzed, while the current paper, that is Part II, is aimed to compare and analyze the exercises and tasks.


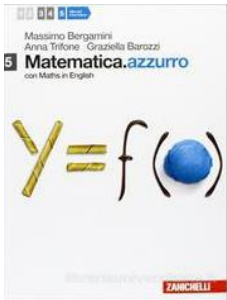
Key Words

Differential Calculus, derivative, textbooks

1. Introducción

Este trabajo responde a un estudio comparativo que da una visión de cómo se presentan los contenidos propios del Cálculo Diferencial a los alumnos del último curso preuniversitario de la rama de Ciencias, en tres países: Francia, Italia y España.

Para llevar a cabo este estudio hemos seleccionado los tres libros de texto que se ilustran a continuación (véanse también las Referencias y el Anexo I) que son muy representativos de los manuales usados en Francia, Italia y España para este fin.

Libro España	Libro Francia	Libro Italia
		

Como se afirmase en la Parte I, estos tres libros de texto son muy representativos de los manuales de mayor uso en los países de origen, pues son los que recomiendan tres editoriales de máxima difusión, es decir, cuyo uso en las aulas está muy extendido, y que además presentan textos que son similares a los de otras editoriales de análoga popularidad. Además, son libros que se han usado hasta el curso 2015/2016, por lo que siguen las indicaciones dadas por las correspondientes leyes educativas vigentes hasta 2016.

Por razones de extensión y concisión, relacionadas a su vez con requisitos editoriales, el resultado de nuestro análisis se presenta en dos artículos: el correspondiente a la Parte I, que es Celorrio-Velasco (2017), en el que se comparan los resultados teóricos de los tres textos mencionados, y el artículo que ahora nos ocupa, la Parte II, en el que se analizan los ejercicios y tareas. Estos artículos intentan ser autocontenidos, de manera que la lectura de uno de ellos no requiera necesariamente la del otro (por lo que será inevitable recordar algunas cosas en esta Parte II). Sin menoscabo de ello, y a modo de colofón, al final de este trabajo, en el apartado de las Conclusiones, vamos a dar una visión de conjunto de la información obtenida en la investigación realizada.

Recordamos igualmente que hemos centrado nuestro análisis en el tema de la derivada por ser este el que vertebra la asignatura de Matemáticas, tanto en el último curso preuniversitario como en el primer curso de todos los grados de Ciencias, y estar obligados a delimitar nuestro estudio de alguna manera. De hecho, la derivada, además de ser uno de los fundamentos del Cálculo Infinitesimal, es uno de sus conceptos más complejos y difíciles de asimilar en dicha disciplina, como refieren autores como Azcárate (1990) y Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008).

Como también se ha comentado en Celorrio y Velasco (2017), las preguntas que nos han motivado a realizar este estudio han sido las siguientes: En relación con el Cálculo Infinitesimal ¿los alumnos de los países europeos de nuestro entorno llegan por lo general a la universidad con un nivel de conocimientos similar al adquirido por los alumnos españoles? Las diferencias formativas que los resultados de estudios internacionales, como el Informe PISA, detectan entre los alumnos de los países de nuestro entorno ¿tienen que ver con los libros de texto que usan los alumnos de dichos países?

Con el análisis realizado, hemos dado respuesta a las siguientes cuestiones:

- a) ¿Qué conceptos, resultados y procedimientos estructuran el tema de la derivada en los tres textos seleccionados?
- b) ¿Qué tipos de razonamientos, presentaciones y argumentos se usan en el desarrollo del Cálculo Diferencial? ¿Con qué rigor se presentan los mismos?
- c) ¿Qué tipo de tareas se proponen dichos textos? ¿Qué tipos de destrezas persiguen? ¿Cómo se estructuran las tareas? ¿Hay diferencias sustanciales entre ellas? ¿En qué procesos del aprendizaje deberían de repercutir tales diferencias, si las hay?
- d) El resultado de nuestro análisis ¿justificaría los datos reflejados por estudios internacionales, como el Informe PISA, sobre las destrezas de los alumnos de los países en cuestión? ¿Cómo justificar nuestras conclusiones?
- e) ¿Qué fortalezas y deficiencias se identifican en el texto español analizado en relación a los otros dos?

En el apartado de Conclusiones, a modo de síntesis global de la investigación realizada, daremos respuesta a todas estas cuestiones que conciernen tanto a la parte teórica como a la relativa los ejercicios y tareas.

Adjuntamos, a continuación, una tabla comparativa de los sistemas educativos francés, italiano y español, en la que se da una perspectiva sobre la configuración de los cursos. Como allí se muestra hay grandes equivalencias o similitudes entre ellos, con la salvedad de que en Italia el último curso preuniversitario termina un año después de lo que acabaría en Francia y España, por lo que los alumnos italianos entran en la universidad con un curso más en su haber.

España	Francia	Italia	Edad
1º Educación Primaria	Curso preparatorio	1º classe della scuola primaria	6-7 años
2º Educación Primaria	Curso elemental 1	2º classe della scuola primaria	7-8 años
3º Educación Primaria	Curso elemental 2	3º classe della scuola primaria	8-9 años
4º Educación Primaria	Curso medio 1	4º classe della scuola primaria	9-10 años
5º Educación Primaria	Curso medio 2	5º classe della scuola primaria	10-11 años
6º Educación Primaria	6ème	1º classe della scuola secundaria	11-12 años

1º E.S.O.	5ème	2º classe della scuola secondaria	12-13 años
2º E.S.O.	4ème	3º classe della scuola secondaria	13-14 años
3º E.S.O.	3ème	1º classe liceo	14-15 años
4º E.S.O.	Seconde	2º classe liceo	15-16 años
1º Bachillerato	Première	3º classe liceo	16-17 años
2º Bachillerato	Terminale	4º classe liceo	17-18 años
		5º classe liceo	18-19 años

Tabla 1. Tabla comparativa de los sistemas educativos.

En cuanto a los itinerarios de los mencionados sistemas educativos, salvo asignaturas puntuales, los alumnos españoles siguen un itinerario común hasta 4º de la E.S.O., curso en el que tras la implantación de la LOMCE se opta entre la opción de enseñanzas académicas y la de enseñanzas aplicadas (la primera orientada al Bachillerato y la segunda a la Formación Profesional), eligiendo en *Bachillerato* un itinerario específico entre los siguientes: Humanidades, Ciencias Sociales, Ciencias y Tecnología o Artes. En Francia esta elección se hace en el curso equivalente a nuestro Primero de Bachillerato, es decir, en el *Première*. Sin embargo, en Italia esta elección se adelanta a los 14 años, pues los alumnos eligen un itinerario específico al comenzar el *Liceo*.

Nuestra investigación se centra en el temario que se imparte en el último curso preuniversitario (es decir, 2º de Bachillerato en el sistema español, Terminale en el sistema francés y 5º Classe di Liceo en el sistema italiano) dentro de la opción por la que debería de optar un alumno que quisiera estudiar un Grado como Matemáticas, Física, o alguna Ingeniería. Es decir, nos centraremos en el *Bachillerato Científico-Tecnológico* en España, en el *Ciclo Científico Terminale* en Francia, y en el *Liceo de Ciencias* en Italia.

2. Sobre la relevancia de los libros de texto y de los estudios comparativos de estos

Como ya se indicó en Celorrio y Velasco (2017), autores como Chevallard (1991), Choppin (1980), Schubring (1987), Sowder (1988), Rodríguez (2006), Alajmi (2012), González y Sierra (2004) y Escolano (1997), o informes como el informe Cockcroft (1985) señalan la extraordinaria importancia de los libros de texto como material didáctico y como instrumento de ayuda para los profesores, llegando incluso a poder desencadenar efectos que colaterales negativos a consecuencia del papel tan preponderante en el aula del libro de texto, que pudiera llegar a propiciar una actitud pasiva por parte del profesor; véase Mustafa y Cullingford (2008) y Maz-Machado y Rico (2015). De hecho, la relevancia del libro de texto es descrita por Maz-Machado y Rico (2015) en los siguientes términos: “a través de los libros de texto podemos ver los hábitos y costumbres, la organización de las ideas, la

actividad intelectual, las relaciones públicas de apropiación y exclusión del saber y, en muchos casos, las modas y tendencias imperantes de una sociedad y una época determinadas”. Por esta razón, no es de extrañar que los estudios sobre los libros de texto sean un tema central y cada vez más en auge en la investigación en Educación Matemática. Una selección de trabajos al respecto, que se presenta con más detalle en Celorrio y Velasco (2017), es la siguiente: Alford (1986), Blanco (1993a, 1993b), Blázquez, Gatica y Ortega (2009), Borasi (1986), Bosch, Gascón y Sierra (2009), Choppin (1980), Gómez (2007), González y Sierra (2004), González-Ruiz, Janvier (1987), Ruiz-Hidalgo y Molina (2014), Mastrull (2002), Pino y Blanco (2008), Rico (2012), Sfard (1991), Sun, Kulm y Capraro (2009), Tall (1991) y Tall et al. (2001).

Por último, no podemos cerrar esta sección sin mencionar el texto de Flores y Rico (2015), pues algunos de los descriptores usados para el análisis de los ejercicios que aquí se realiza, se basan en el análisis de las tareas que estos autores proponen, en función de los procedimientos necesarios para que el alumno realice el ejercicio.

3. Marco teórico de nuestro estudio

Presentamos a continuación una tabla en la que podemos visualizar los diferentes organizadores que usaremos para estudiar los ejercicios y tareas. Para la selección de estos organizadores hemos tenido presentes los trabajos antes mencionados en función de los intereses intrínsecos de nuestro estudio.

Análisis de las tareas y ejercicios	
Procedimientos necesarios.	Tareas de reproducción. Tareas de conexión de conocimientos. Tareas de reflexión.
Ubicación en el proceso de aprendizaje.	Tareas de introducción y motivación. Tareas de evaluación de conocimientos previos. Tareas de exploración. Tareas de ejercitación. Tareas de extensión.
Otros aspectos.	Si están resueltos o no. Si requieren herramientas tecnológicas o no.

Tabla 2. Organizadores.

La principal inspiración a la hora de definir los organizadores y descriptores de este análisis han sido los estudios de Blanco (1993b), Pino y Blanco (2008), Flores y Rico (2015).

Atendiendo a los *procedimientos* que el alumno debe realizar para su resolución, cada tarea puede pertenecer a una de las siguientes categorías:

○ *Tareas de reproducción.* Siguiendo la clasificación hecha por Flores y Rico (2015), y teniendo también en cuenta la hecha por Blanco (1993b), en esta categoría encontramos las tareas de reconocimiento (en las que basta con reconocer la propiedad, definición o factor específico para resolverlas) y los ejercicios algorítmicos o de repetición.

○ *Tareas de conexión*. En este tipo de tareas, el alumno necesita conectar varios conocimientos para, aplicándolos en el orden correcto, resolver la tarea.

○ *Tareas de reflexión*. Para resolver este tipo de tareas, se requiere el dominio por parte del alumno de la red conceptual y, adicionalmente, la capacidad de deducir nuevas relaciones de la información que se tenía anteriormente.

Atendiendo a la **ubicación** en el proceso de aprendizaje: En esta categoría se hará distinción entre:

○ *Tareas de introducción y motivación*. Con estas tareas se pretende introducir o motivar los contenidos que se van a trabajar posteriormente.

○ *Tareas de evaluación de conocimientos previos*. El objetivo de estas tareas es que tanto el alumno como el profesor se percaten de los conocimientos que posee el alumno antes de comenzar a trabajar con los contenidos nuevos.

○ *Tareas de exploración*. Estas tareas plantean preguntas a los alumnos, de forma que tengan que investigar para encontrar una solución y, con esta investigación, adquieran nuevos conocimientos.

○ *Tareas de ejercitación*. Con estas tareas se ejercitan los conocimientos que se han adquirido para consolidarlos.

○ *Tareas de extensión*. Con estas tareas se pretende que el alumno aumente sus conocimientos presentándole casos similares a los que ha estudiado, pero que tienen alguna diferencia sustancial con ellos. Por tanto, pudiera ser redundante incluirlos en los desarrollos teóricos, y sin embargo, como tarea para el alumno, presentan cierto interés. En estas tareas incluimos también las que tratan de relacionar los conocimientos dados con temas transversales a la teoría.

C) Además, en relación con el análisis de los ejercicios y tareas, se incluirán los siguientes aspectos, que consideramos relevantes para nuestro estudio:

- Si los ejercicios están resueltos o no.
- Si requieren o no del uso de herramientas tecnológicas.

4. Metodología

Como ya se indicase en Celorrio y Velasco (2017), este estudio se inscribe en el paradigma cualitativo de investigación, y se ajusta a un método de análisis de contenido; véase por ejemplo Ibáñez y Llombart (2002). Siguiendo la clasificación dada por Van Dormolen (1986), no cabría decir que se trata de un estudio a posteriori puesto que son textos que han estado vigentes hasta 2016 y que han sido sustituidos por otros prácticamente idénticos.

Tras haber realizado en el mencionado trabajo el análisis de los resultados teóricos de los textos seleccionados, nos centraremos ahora pues en el análisis de las actividades y tareas. Para ello, usaremos los descriptores ya especificados. Las categorías que tienen una mayor relevancia en nuestro estudio son las relacionadas con los procedimientos que el alumno debe realizar para resolver la tarea, pues nos dan una idea bastante significativa del enfoque matemático que tiene el libro. En cuanto al análisis cuantitativo, el lector ha de tener en cuenta que cuando se da una estimación porcentual de una determinada parte de los

ejercicios de cierto tipo, este valor es solo orientativo, pues un ejercicio concreto podría desdoblarse en dos en otro texto (es decir los ejercicios no son del todo comparables uno a uno, y texto a texto). No obstante, cuando las diferencias son verdaderamente significativas, el enfoque didáctico y metodológico de los textos sí quedará desvelado, entre otras cosas, gracias también al análisis cuantitativo.

5. Análisis

En lo que sigue, para no citar reiteradamente a los autores de los textos seleccionados, haremos referencia de manera sintética a los textos E, F e I para indicar el texto español, francés o italiano, respectivamente.

Para el análisis comparativo de los ejercicios, vamos a considerar solo aquellos ejercicios que tengan que ver con el Cálculo Diferencial. Comenzamos haciendo notar que, a la hora de hacer comparaciones, la cantidad de ejercicios que se enmarcan dentro de un tipo y otro no es realmente indicativa, pues no se puede establecer una correspondencia uno a uno entre los ejercicios de un libro y de otro. Estructuraremos nuestro análisis haciendo

Por otra parte, aclaramos que relación con las aplicaciones de las derivadas a otros campos, en particular, al de la Física, los textos E y F abordan estas cuestiones únicamente en algunos de los ejercicios propuestos, mientras que el texto I dedica a ello algún apartado teórico.

Iniciamos nuestro análisis con el estudio de las *tareas de introducción y motivación*. Mientras que en el texto E no se muestra gran interés por las tareas de este tipo, introduciendo los resultados teóricos en muchas ocasiones casi sin motivación, en el texto F hay una sección inicial donde se presentan todas las tareas de motivación juntas, y en el texto I muchos de los resultados teóricos se motivan mediante un ejercicio que los precede. En la Tabla 3 podemos ver dos ejemplos de los ejercicios de motivación de los textos F e I. Las diferencias entre los dos libros son notorias. Mientras que, por lo general, el libro I presenta la tarea ya resuelta, en el libro F se proponen ejercicios sin resolver, muy completos y guiados, para llevar al alumno a obtener la conclusión deseada. Hay que destacar además que en el texto F casi todos los resultados se acompañan de una tarea introductoria, mientras que en el texto I son muy pocos los que se introducen mediante un ejercicio.

TEXTO F	<p>On considère une fonction dérivable f, une fonction affine $u : x \mapsto ax + b$, et on définit la fonction $g : x \mapsto f(u(x))$.</p> <p>Cas 1 : f est la fonction carré On pose : $f(x) = x^2$ et $u(x) = -3x + 5$; on a donc $g(x) = (-3x + 5)^2$.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1 Déterminer l'ensemble de définition de g. 2 Justifier que g est dérivable en tout point x de son ensemble de définition et calculer $g'(x)$ après avoir développé $g(x)$. 3 Pour tout réel x, calculer $f'(x)$, puis $-3f'(-3x + 5)$. Que constate-t-on ? <p>Cas 2 : f est la fonction inverse On pose : $f(x) = \frac{1}{x}$ et $u(x) = 2x + 1$; on a donc $g(x) = \frac{1}{2x + 1}$.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1 Déterminer l'ensemble de définition de g. 2 Justifier que g est dérivable en tout point de son ensemble de définition et calculer $g'(x)$ pour tout réel $x \neq -\frac{1}{2}$. 3 Calculer, pour tout réel $x \neq 0$, $f'(x)$, puis pour tout réel $x \neq -\frac{1}{2}$, $2f'(2x + 1)$. Que constate-t-on ? Conjecturer une formule générale pour la dérivée de $g : x \mapsto f(ax + b)$.
---------	---

Texto F, pág. 93.

TEXTO I	<p>Consideriamo la funzione: $y = f(x) = x^3 - 2x + 1$, con $x \in \mathbb{R}$.</p> <p>La sua derivata, $y' = f'(x) = 3x^2 - 2$, è, a sua volta, una funzione della variabile x, definita sempre per $x \in \mathbb{R}$. Anche di tale funzione possiamo calcolare la derivata: $Dy' = 6x$.</p> <p style="text-align: right;">Texto I, pág. 1320.</p>
---------	---

Tabla 3. Tareas de motivación.

En cuanto a las **tareas de evaluación de conocimientos previos**, es el texto I el que carece de ellas, mientras que los textos E y F sí las incluyen (en una sección dedicada a ello). Ilustramos este tipo de actividades en la Tabla 4. De nuevo, encontramos ciertas diferencias entre unas tareas y otras, aunque a este respecto no son muy llamativas. Lo más significativo es que las tareas del libro F fomentan que el alumno recuerde los conocimientos adquiridos sin ayuda externa, mientras que las actividades del libro E invitan a que los alumnos tengan que recurrir a fuentes externas si no recuerdan los conceptos sobre los que les preguntan.

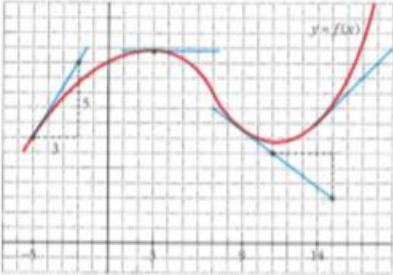
TEXTO E	<p style="color: #e67e22;">Tangentes a una curva</p> <p>Recuerda que la derivada de una función $y = f(x)$ en un punto de abscisa x_0 se designa por $f'(x_0)$, y es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en $x = x_0$.</p>  <p>La pendiente de la recta tangente a esta gráfica en $x = -5$ es $\frac{5}{3}$.</p> <p>Por tanto, $f'(-5) = \frac{5}{3}$.</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Halla, mirando la gráfica y las rectas trazadas, $f'(3)$, $f'(9)$ y $f'(14)$. ■ Di otros tres puntos en los que la derivada es positiva. ■ Di otro punto en el que la derivada es cero. ■ Di otros dos puntos en los que la derivada es negativa. ■ Di un intervalo $[a, b]$ en el que se cumpla que "si $x \in [a, b]$, entonces $f'(x) > 0$". <p style="text-align: right;">Texto E, pág. 255.</p>									
TEXTO F	<p style="color: #e67e22;">A Revoir la notion de dérivée</p> <p>QCM Pour chacune des affirmations suivantes, préciser la seule réponse correcte.</p> <p>1 Si la fonction f est dérivable en a, alors :</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px;">a. $f'(a) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$</td> <td style="padding: 2px;">b. $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 0$</td> <td style="padding: 2px;">c. $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$</td> </tr> </table> <p>2 La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x} - \frac{1}{x}$, dérivable sur $]0; +\infty[$, est telle que, pour tout réel $x > 0$:</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px;">a. $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$</td> <td style="padding: 2px;">b. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$</td> <td style="padding: 2px;">c. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$</td> </tr> </table> <p>3 La fonction $f : x \mapsto 2x^2$, dérivable sur \mathbb{R}, est telle que, pour tout réel x :</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px;">a. $f'(x) = 2x^4$</td> <td style="padding: 2px;">b. $f'(x) = 10x^4$</td> <td style="padding: 2px;">c. $f'(x) = 8x^4$</td> </tr> </table> <p style="text-align: right;">Texto F, pág. 90.</p>	a. $f'(a) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$	b. $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 0$	c. $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$	a. $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$	b. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$	c. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$	a. $f'(x) = 2x^4$	b. $f'(x) = 10x^4$	c. $f'(x) = 8x^4$
a. $f'(a) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$	b. $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 0$	c. $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$								
a. $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$	b. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$	c. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$								
a. $f'(x) = 2x^4$	b. $f'(x) = 10x^4$	c. $f'(x) = 8x^4$								

Tabla 4. Tareas de evaluación de conocimientos previos.

Las **tareas de exploración** son muy interesantes para los alumnos pues los motivan para que adquieran conocimientos por sus propios medios. De nuevo, el texto que destaca por la ausencia de este tipo de actividades es el E. En los textos I y F, sin embargo, encontramos algunas actividades de este tipo, aunque se aprecian ciertas diferencias entre un texto y otro, como se observa en la Tabla 5.

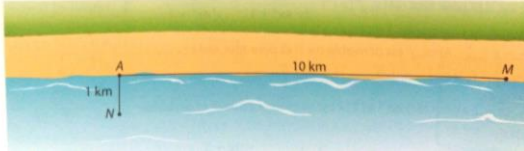

TEXTO F	<p style="text-align: center;">Mener une recherche et rédiger</p> <p style="text-align: center;">11 Le navigateur distrait</p> <p>Robinson, en vacances dans une maison côtière (point M sur le dessin), se promène dans son canot à moteur. Distract par un dauphin, il heurte un récif qui éventre son embarcation. Il doit alors rentrer à la nage et à pied.</p> <p>Le lieu du naufrage (N sur le dessin) est à un kilomètre du point le plus proche de la côte, supposée rectiligne (point A sur le dessin). On sait de plus que, le long du rivage, la distance AM mesure dix kilomètres.</p> <p>Robinson évalue ses vitesses moyennes à $3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ dans l'eau et $5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ sur terre.</p> <p>On s'intéresse au problème suivant : en quel point de la côte Robinson doit-il atteindre la terre ferme pour rejoindre au plus vite la maison ?</p>  <p style="text-align: center;">Texto F, pág. 98.</p>
TEXTO I	<p style="text-align: center;">Attività</p> <p style="text-align: center;">La bellezza dei frattali</p> <p>Le immagini generate con il computer, applicando le teorie matematiche relative ai frattali, sono così intriganti da far nascere vere e proprie opere d'arte o paesaggi insoliti e surreali come quello in figura.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Cerca su Internet informazioni e immagini sull'«arte frattale» e sui software in grado di generare immagini frattali. <p style="text-align: center;">Cerca nel Web: arte frattale, software frattali</p>  <p style="text-align: center;">Texto I, pág. 1308.</p>

Tabla 5. Tareas de exploración.

Las tareas de investigación propuestas en F son problemas que buscan una solución concreta, promoviendo que los alumnos investiguen para llegar a ella. Para ello, el mencionado libro ofrece indicaciones que guían a los alumnos, sobre todo en el planteamiento del problema. Además, en dicho texto se suele recomendar el uso de programas como GeoGebra para la resolución de estos problemas. En contraposición, las tareas propuestas por el libro I no requieren una respuesta concreta: son tareas muy abiertas, que dejan al alumno la total libertad de investigar casi cuanto quiera.

Otro tipo de tareas son las de *extensión*, cuyo objetivo es aumentar los conocimientos del alumno con casos parecidos a los que se ya han estudiado, pero que presentan alguna diferencia sustancial, o que relacionan la teoría dada con temas transversales. No incluimos en esta idea de transversalidad las actividades puramente matemáticas que tratan de ambientarse en una situación real, como sucede en la mayoría de los problemas de optimización, en los que el escenario es casi irrelevante desde el punto de vista matemático. De nuevo, no encontramos tareas de esta índole en el texto E, mientras que sí las encontramos en los textos F e I. En este aspecto destaca el libro F, pues introduce bastantes resultados teóricos a través de las actividades (Imagen 1).

En el texto F también se presentan tareas en las que se profundiza en los resultados estudiados en relación con fenómenos físicos o económicos, estudios de poblaciones, etc. No hay sección dedicada a este tipo de problemas, sino que los encontramos diseminados entre las diferentes secciones del texto. En contraposición, en el texto I no encontramos ejercicios orientados a trabajar resultados teóricos no introducidos previamente, pero sí hay tareas que relacionan la teoría dada con fenómenos externos a las Matemáticas, principalmente en una sección llamada “*Realtà e modelli*” (realidad y modelos), aunque algunas de estas tareas también aparecen en otras partes del texto.

12 Étude de la fonction tangente

Pour tout réel x tel que $\cos x \neq 0$, on définit la tangente de x par : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

1 Justifier que l'ensemble de définition de la fonction tan est $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

2 Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \right\}$ et $n \in \mathbb{Z}$.
Calculer $\tan(x + n\pi)$ et $\tan(-x)$.

Indication Traiter séparément n pair et n impair.

Que peut-on en déduire graphiquement ?
On étudie donc la fonction tan sur l'intervalle $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$.

3 Justifier que la fonction tan est dérivable sur $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$ et que, pour tout x de $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$:

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

En déduire les variations de la fonction tan sur $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$.

4 Calculer $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x$.
 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$
 $x < \frac{\pi}{2}$
Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

5 Expliquer le tracé ci-dessous proposé par une calculatrice.

Indication La fenêtre a été définie avec $X_{\max} = 2\pi$, $X_{\min} = -2\pi$.
L'axe des abscisses est gradué de $\frac{\pi}{4}$ en $\frac{\pi}{4}$ et l'axe des ordonnées de 1 en 1.

caso

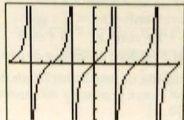


Imagen 1. Texto F, pág. 99.

Como era de esperar, una gran cantidad de *tareas de ejercitación* se presentan en las tres monografías, aunque con ciertas diferencias entre ellas. Puesto que con posterioridad vamos a analizar los procedimientos que necesitan los alumnos para resolver los ejercicios propuestos, así como la “dificultad” de los mismos, en este momento nos vamos a centrar en los ejercicios resueltos que muestran los tres libros analizados para ilustrar las secciones de teoría. En cuanto a las tareas resueltas, podemos hablar en general de los siguientes patrones: En el texto E, las indicaciones son escasas, y, de nuevo, nos encontramos con el ya más que mencionado problema de la mezcla de notaciones. En contraposición, los ejercicios resueltos en F se presentan con amplias explicaciones que suelen ir acompañadas de las notas de ayuda “*Bon a savoir*” en las que, además, si los ejercicios se salen de los esquemas tradicionales, se dan indicaciones sobre cómo afrontar problemas de esa índole. Por último, observamos que en el texto I las explicaciones son bastante claras y esquemáticas. Añadimos que, además de los ejercicios resueltos en las secciones de teoría, los tres textos en consideración disponen de ejercicios resueltos a lo largo de las secciones de tareas.

Pasamos ahora a hacer el análisis de las tareas en función de los *procedimientos* utilizados para resolverlas. Es en este momento cuando es más importante tener en cuenta que no hay una equivalencia uno a uno entre los ejercicios de los diferentes libros. De hecho, como ya hemos ido viendo, los ejercicios del texto F tienden a ser más largos, incluyendo con frecuencia con varias preguntas y apartados, mientras que en los textos I y E los ejercicios suelen ser más concretos y concisos.

Hacemos constar que, en nuestro análisis, cuando los ejercicios cuentan con varios apartados que necesitan un nivel de aplicación procedimental diferente, lo que hacemos es clasificar el ejercicio en función del nivel más alto de procedimientos que es necesario para abordar la tarea en su totalidad.

A título indicativo, con todas las reservas ya comentadas, presentamos en la siguiente tabla las cifras absolutas obtenidas en nuestro análisis de las tareas, así como los porcentajes de los distintos tipos de ejercicios de cada libro, para que el lector pueda hacerse una idea primaria de las proporciones.

	Texto E		Texto F		Texto I	
	Total	%	Total	%	Total	%
Tareas de reproducción	154	60'16	103	50'99	1241	88'01
Tareas de conexión	93	36'33	52	25'74	169	11'99
Tareas de reflexión	9	3'52	47	23'27	0	0
Total	256		202		1410	

Tabla 6. Clasificación de las tareas según los procedimientos necesarios.

Como podemos ver, en los tres textos analizados, los ejercicios dominantes son los de reproducción, aunque el porcentaje que encontramos de estos ejercicios varía de un libro a otro. Sin embargo, no todos los ejercicios de reproducción siguen un mismo esquema. De hecho, en los ejercicios de reproducción de los textos I y E se suele hacer una pregunta concreta mientras que los ejercicios del libro F casi siempre se hacen varias preguntas sobre lo que se está trabajando, con la idea de aplicar varios resultados teóricos. Destacamos, además, que en las tareas del libro F se mezclan los resultados que se acaban de dar (por ejemplo, la derivabilidad del seno y coseno) con resultados que no figuran en los desarrollos teóricos, pero que parecen haberse dado en cursos anteriores (como es el caso del estudio del crecimiento y decrecimiento de una función). Aunque la mayoría de las tareas de aplicación del libro F son de ese tipo, encontramos también algunas tareas más similares a las de los textos I y E, aunque son minoría en F. En la Tabla 7 proporcionamos algunos ejemplos de tales ejercicios.

TEXTO E	<p>1. Si $f(x) = x^2$, hallar su derivada en $x_0 = 1$.</p> <p>Texto E, pág. 256.</p>
TEXTO F	<p>3 On considère la fonction $f : x \mapsto \cos x - \sin x$.</p> <p>1 Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer $f'(x)$.</p> <p>2 En utilisant le cercle trigonométrique ou les positions relatives des courbes des fonctions \cos et $-\sin$, étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; 2\pi]$, puis établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.</p> <p>Texto F, pág. 95.</p>
TEXTO I	<p>Calcola la derivata delle seguenti funzioni nel punto c indicato a fianco, applicando la definizione di derivata.</p> <p>33 $f(x) = x^3 + 4x + 1$, $c = 1$; $f(x) = -\frac{5}{x}$, $c = 2$. $\left[7; \frac{5}{4}\right]$</p> <p>34 $f(x) = 1 + \sqrt{x}$, $c = 4$; $f(x) = 2x^3 - x$, $c = 0$. $\left[\frac{1}{4}; -1\right]$</p> <p>35 $f(x) = x^2 - 1$, $c = 3$; $f(x) = \frac{x+3}{x-4}$, $c = -1$. $\left[6; -\frac{7}{25}\right]$</p> <p>Texto I, pág. 1337.</p>

Tabla 7. Tareas de reproducción.

Respecto a los ejercicios de **conexión**, vemos como el número de estos, en los tres textos, es inferior al número de ejercicios de aplicación. Además, el número de ejercicios de conexión del libro I cae drásticamente en comparación con los otros dos libros, que mantienen un porcentaje de ejercicios de conexión medianamente alto. Por otra parte, los

ejercicios de conexión que encontramos en los textos I y E consisten, por lo general, en cálculo de ciertas constantes para que se verifique alguna propiedad, en el estudio de determinadas características, o son problemas de optimización donde los alumnos tienen que recurrir a conocimientos de otros temas. Sin embargo, las tareas de conexión del libro F son muy variadas, pues proponen demostraciones de propiedades, ejercicios con los que deducir parte de la teoría, tareas para llegar a conclusiones que pretenden ser introductorias de la teoría que se va a desarrollar posteriormente, tareas para obtener conclusiones a partir de gráficos obtenidos con un ordenador, además de ejercicios similares a los que se hacen en E y en I. En la Tabla 8 encontramos ejemplos de estos ejercicios.

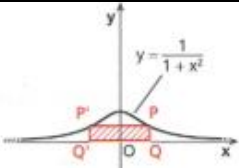
TEXTO E	<p>71 Un avión vuela horizontalmente a 6 km de altura. La ruta del avión pasa por la vertical de un punto P y se sabe que, en el instante en que la distancia del avión a P es 10 km, dicha distancia aumenta a razón de 6 km/minuto.</p> <p>Halla la velocidad del avión, que supondremos constante.</p> <p>Texto E, pág. 279.</p>
TEXTO F	<p>On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \sqrt{x+a}$ où a est un réel fixé quelconque et $g(x) = \sqrt{3-2x}$.</p> <p>On appelle \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé (O, I, J).</p> <p>Le but de ce problème est de déterminer si on peut choisir le réel a pour que les deux courbes se coupent en un point où leurs tangentes respectives sont perpendiculaires.</p> <p>Texto F, pág. 115.</p>
TEXTO I	<p>298 Nella figura è rappresentato il grafico della funzione $y = \frac{1}{1+x^2}$.</p> <p>La retta $x = a$ parallela all'asse y e la sua simmetrica $x = -a$ determinano un rettangolo $PP'Q'Q$. Trova per quale valore di a l'area di $PP'Q'Q$ è massima.</p> <p>[$a = 1$]</p>  <p>Texto I, pág. 1451.</p>

Tabla 8. Tareas de conexión.

Los ejercicios de **reflexión**, como podemos ver en la Tabla 9, son los que marcan la diferencia entre F y los otros dos textos. Mientras que el porcentaje de ejercicios de reflexión en el libro E es muy bajo y en I es prácticamente despreciable, en F se mantiene bastante alto, lo que nos indica que tipo de enseñanza promueve este libro de texto.

En casi todas las secciones del texto F figuran uno o varios ejercicios de reflexión que inducen al alumno a obtener conclusiones a raíz de lo que ha estudiado, o a realizar por sí mismo un estudio diferente al que ya se ha hecho. Además, hay ejercicios en los que la reflexión va encaminada a que el alumno investigue nuevos métodos para conseguir llegar a la solución deseada. Estos ejercicios de reflexión suelen estar divididos en apartados, de forma que cada una de ellos sirva para guiar un poco a los alumnos en la actividad propuesta.

Las tareas de reflexión del texto E están planteadas mayoritariamente en dos secciones de ejercicios de título “*Cuestiones teóricas*” y “*Para profundizar*”, aunque también podemos encontrar algún ejercicio de reflexión en otras secciones.

TEXTO E	<p>Halla el valor que ha de tener m para que la función $f(x)$ sea derivable en $x = 1$.</p> $f(x) = \begin{cases} 3 - mx^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{mx} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ <p>Texto E, pág. 274.</p>
TEXTO F	<p>44 Démonstration du cours : dérivation des fonctions sinus et cosinus Voir le théorème du cours, page 94.</p> <p>Rappel (voir l'activité 2, page 92) : les fonctions sinus et cosinus sont dérivables en zéro avec $\sin'(0) = 1$ et $\cos'(0) = 0$.</p> <p>1 Démontrer que pour tout réel a et tout réel non nul h,</p> $\frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \sin a \times \frac{\cos h - 1}{h} + \cos a \times \frac{\sin h}{h}.$ <p>Coup de pouce $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$</p> <p>2 En déduire que la fonction sinus est dérivable sur \mathbb{R} et a pour dérivée la fonction cosinus.</p> <p>3 Montrer alors que cos est dérivable sur \mathbb{R} et que, pour tout réel x, $\cos'(x) = -\sin x$.</p> <p>Coup de pouce $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right); \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.$</p> <p>Texto F, pág. 108.</p>

Tabla 9. Tareas de reflexión.

Por último, incluimos la Tabla 10, donde se recogen el número de ejercicios resueltos que presenta cada libro de texto analizado, así como el número de los mismos en los que recomienda el uso de programas como Derive o GeoGebra, ya sea como ayuda o como medio para buscar la solución.

	Texto E		Texto F		Texto I	
	Total	%	Total	%	Total	%
Tareas resueltas	54	21'09	15	7'43	93	6'6
Tareas con dispositivos	0		27	13'37	2	0'14
Total	256		202		1410	

Tabla 10. Otros aspectos relevantes de las tareas.

Las dos actividades del texto I que proponen el uso de programas informáticos pueden ser de utilidad para otros ejercicios pues, en una de ellas, se construye un programa en GeoGebra que calcula la recta tangente en un punto de una función y, en la otra, se determina, en una familia de funciones dada, la función que tiene un punto de inflexión en cierto punto prefijado. Sin embargo, el hecho de que estos ejercicios puedan reutilizarse no implica que los alumnos vayan a hacerlo, con lo cual, puede acusarse cierta falta de uso de las nuevas tecnologías en este texto. Esta carencia es aún mayor en el texto E, donde no hay ejercicios que recurran a estos programas, ni como medio de resolución, y ni siquiera como apoyo gráfico. Esto es llamativo dado que, el tema que nos ocupa, posee una interpretación

geométrica relevante que invita a su visualización. Por el contrario, en el texto F sí se propone ampliamente el uso programas como Derive, GeoGebra, o calculadoras electrónicas, en una amplia variedad de ejercicios, ya sea como medio para intuir donde estará la solución, como medio indispensable para llegar a la solución, como una forma de evitar cálculos dificultosos, o simplemente para verificar los que ya se han realizado, entre otras indicaciones.

Para terminar, es obligado mencionar que los tres libros de texto analizados presentan, al margen de los ejercicios que ilustran la teoría, una sección adicional de ejercicios resueltos; si bien hay que añadir que la del texto F es bastante más reducida que la de los otros dos textos. En los libros I y E, por lo general, se presenta un ejemplo resuelto de los tipos de problemas más relevantes que se trabajan en los desarrollos teóricos. Sin embargo, en el texto F, aunque se proporciona una gran variedad de ejercicios resueltos, en ocasiones se opta por dar ciertas indicaciones en algunos de ellos. Esto es bastante lógico, pues como hemos visto antes, el porcentaje de ejercicios de conexión y reflexión es bastante elevado, en comparación con el de los libros I y E.

Finalizamos la sección con dos tablas que resumen los resultados obtenidos del análisis de los tres textos considerados.

		Análisis de las Tareas		
		Texto E	Texto F	Texto I
Ubicación en el proceso de aprendizaje.	Tareas de introducción y motivación.	Casi no encontramos.	En todos los temas hay una sección inicial. Se motivan casi todos los resultados.	Justo antes de los resultados teóricos. No se motivan todos los resultados.
	Tareas de evaluación de conocimientos previos.	Sección previa. Necesitan recursos externos si no se recuerdan los conocimientos.	Sección previa. Fomentan que el alumno recuerde lo estudiado.	No encontramos.
	Tareas de exploración.	No encontramos.	Buscan una solución concreta. Ofrece guía a los alumnos.	Muy abiertas. Dejan total libertad.
	Tareas de ejercitación.	Al final de todas las secciones de teoría y en relaciones de problemas posteriores. Cubren la gran mayoría de las tareas.	Bastantes tareas de este tipo, pero no son las más preponderantes.	Cubren la gran mayoría de las tareas.

	Tareas de extensión.	No encontramos.	Introducen bastantes resultados mediante las mismas y tratan temas transversales.	Principalmente tratan temas transversales, y por lo general no trabajan resultados teóricos nuevos.
Procedimientos necesarios.	Tareas de reproducción.	60'16%	50'99% Se combinan varias preguntas.	88'01%
	Tareas de conexión.	36'33%	25'74%	11'99%
	Tareas de reflexión.	3'52%	23'27%	0%
Otros aspectos.	Ejercicios resueltos.	21'09% Indicaciones escasas.	7'43% Amplias explicaciones.	6'6% Explicaciones esquemáticas y claras.
	Tareas que usan herramientas tecnológicas.	No hay.	27%	0'14%

Tabla 11. Resumen análisis tareas y ejercicios.

6. Conclusiones

De nuevo, al igual que en la primera parte de este estudio, la conclusión más relevante de la investigación realizada es la gran diferencia entre el texto francés y los manuales italiano y el español.

Mientras que respecto a resultados teóricos el libro francés era el más escaso, respecto a tareas y ejercicios es el más variado, pues tiene tareas de todos los tipos, mientras que en los libros italiano y español encontramos ciertas carencias de ejercicios y tareas. Lo más llamativo, es que el libro francés presenta algunos resultados teóricos a través de ejercicios, mientras que el italiano y el español no lo hacen, pues dedican el contenido teórico de varios temas a este cometido. Además, este libro motiva todos los resultados mediante ejercicios, mientras que en los otros dos manuales estas motivaciones son reducidas (libro italiano) o bastante escasas (libro español). También es destacable que la forma de abordar las tareas y ejercicios del libro francés deja más cosas al alumno que los ejercicios propuestos por los libros español e italiano, y son ciertamente más completos, pues suelen ser varios apartados entrelazados, ofreciendo a veces consejos para abordar estos problemas más complejos.

Si atendemos a los procedimientos necesarios para realizar las tareas, vemos que, de nuevo, el francés se desmarca. Aunque los tres libros presentan una mayoría de tareas de reproducción, vemos como las tareas de conexión y reflexión se reducen drásticamente en los libros español e italiano, mientras que en el libro francés siguen teniendo un porcentaje bastante alto.

Cabe destacar también que el libro español es el que más ejercicios resueltos incluye, lo que puede dar más autonomía a los alumnos. Por último, llama la atención el hecho de que en el texto italiano y en el español no incluyen casi ejercicios que requieran el uso de herramientas tecnológicas, a pesar de la utilidad de las mismas siquiera como ayuda para el alumno a la hora de interpretar conceptos tan delicados.

A modo de conclusión final procedemos ya a dar respuesta a las cuestiones que nos planteábamos al comienzo del estudio que ahora concluimos.

a) *¿Qué conceptos, resultados y procedimientos estructuran el tema de la derivada en los tres textos seleccionados?*

Nos resulta muy llamativo que en el texto F no se dedique un tema o una sección a la derivada propiamente dicha, y que los contenidos propios del Cálculo Diferencial aparezcan diseminados en otros encuadres teóricos. A pesar de que presentar los resultados relativos al Cálculo Diferencial en un bloque temático propio puede llegar a ser útil para el alumno, en el texto F se renuncia a ello en pro de un planteamiento diferente al de los textos I y E. De hecho, mientras que en las monografías I y E la derivada es una nueva “operación” con la que trabajar, que se establece y se desarrolla, en el texto F la derivada se plantea como una extensión natural del conocimiento que se tenía sobre determinadas funciones elementales, que termina siendo decisiva a la hora de definir ciertas funciones, como la exponencial.

También conviene destacar la diferencia de resultados teóricos abordados en los libros de I y E, en relación con los del libro F. Aun teniendo en cuenta que en F se presentan algunos teoremas a través de las actividades propuestas, los resultados teóricos que se establecen allí son escasos en comparación con los aportados en los textos I y E. Sin embargo, buena parte de los desarrollos teóricos de los libros I y E que se omiten en F, a la postre, terminan usándose en los ejercicios de F, lo que invita a pensar que son resultados tratados en años anteriores y se presentan como conocimientos ya adquiridos. Sirva de ejemplo al respecto el cálculo de la recta tangente o el estudio de la monotonía de una función, cuestiones que omitiéndose en las secciones de F dedicadas a la teoría, en cambio sí se trabajan en los ejercicios. Pero nos queda el interrogante de porqué hay resultados de cierta complejidad que el texto F da por conocidos mientras que otros más simples sí son desarrollados con detenimiento. Esto invita a investigar en profundidad cómo se estructura en el sistema educativo francés el aprendizaje de la derivada. Dicho estudio transversal queda aquí propuesto.

Comparando los textos I y E entre sí, la diferencias entre los resultados teóricos que se abordan no es significativa. De hecho, los resultados que se establecen son prácticamente los mismos, aunque hay algunas cosas puntuales que sí aparecen en uno de los textos y no en el otro. Por ejemplo, en el texto I no se aborda la derivación logarítmica (y en E sí se hace), pero en el texto E no se habla de los métodos de aproximación de soluciones de ecuaciones (y en I sí se trata). Sin embargo, el hecho de que haya tanta similitud entre los contenidos teóricos de los textos I y E es relevante puesto que en Italia (libro I), el equivalente al Bachiller español, dura un año más. Es decir, se dispone de un año más para dar tales contenidos y afianzarlos. Esto, en cierto modo, se ve reflejado en los textos analizados, pues en el libro I los resultados teóricos suelen venir precedidos de una introducción, aunque sea de índole puramente matemática, mientras que en el texto E buena parte de los resultados carecen de ella. Por avalar esta afirmación con otro hecho añadimos que, como hemos puesto de manifiesto en el análisis efectuado, en el texto I se hace más uso de gráficas (cuando procede) para que los alumnos comprendan bien la interpretación geométrica de los conceptos, cosa que no siempre sucede en el texto E.

b) *¿Qué tipos de razonamientos, presentaciones y argumentos se usan en el desarrollo del tema seleccionado? ¿Con qué rigor se presentan los mismos?*

Uno de los grandes problemas que hemos detectado en los textos I y E es la mezcolanza (a veces innecesaria) de notaciones diferentes, lo que puede complicar el proceso de aprendizaje del alumno en gran medida. De hecho, a veces, incluso en una misma ecuación se presentan notaciones distintas, lo que provoca que determinadas ligaduras conceptuales entre unos elementos y otros se debiliten. Con ello, el alumno, además de tener que tener en cuenta todas las relaciones matemáticas que está tratando de asimilar en ese momento, ha de ser capaz de interpretar que dos cosas idénticas pueden denotarse de forma distinta incluso dentro de un mismo resultado, enunciado, o demostración.

Respecto a las demostraciones, nos percatamos de que los textos I y E tratan de dar las demostraciones en toda su generalidad. En contraposición, en el texto F, con la intención de hacer los resultados más asequibles, a la hora de presentar una determinada prueba, se pudiera optar por centrarse en casos particulares donde la mecánica sea más simple de comprender, dejando las generalizaciones para después, e incluso llegando a obviarlas. Este libro también deja algunas demostraciones propuestas como ejercicios, dando ciertas pautas de resolución orientativas. Sin embargo, esto no ocurre por lo general en los textos I y E en los que, cuando se plantea una situación de este tipo, es para que los alumnos hagan demostraciones casi idénticas a alguna de las que se acaban de presentar.

Por último, respecto a la presentación de los resultados, apuntamos que los gráficos usados en los textos F e I son bastante completos, y ayudan a los alumnos a entender mejor los enunciados. Además, son comprensibles sin necesidad de dar una explicación muy detallada de ellos. Sin embargo, los gráficos del libro E son más esquemáticos, lo que redundaría en una ayuda menor para la comprensión de las explicaciones.

c) *¿Qué tipo de tareas usan dichos textos? ¿Qué tipos de destrezas persiguen? ¿Cómo se estructuran? ¿Hay diferencias? ¿En qué procesos del aprendizaje deberían de repercutir tales diferencias?*

A pesar de su estructura, se podría decir que el texto F es bastante completo respecto a las categorías de tareas estudiadas. La ausencia de resultados teóricos se suple en cierta medida con ejercicios muy variados, orientados a que el alumno recapacite sobre el alcance de los resultados, y no solo aplique fórmulas o resultados de manera más o menos rutinaria. Con estos ejercicios se persiguen varios objetivos que van desde motivar al alumno, hasta hacerlo investigar sobre ciertas cuestiones, pasando por ejercitar los resultados presentados e introducir nuevos resultados a través de las tareas. En el extremo opuesto tenemos al libro de texto I, cuyos ejercicios son en su mayoría de aplicación, aunque también incluye alguno orientado a que los alumnos indaguen sobre un determinado tema. En el término medio tenemos el texto E, que presenta más variedad de ejercicios que el libro I, pero no llega a la diversidad del F. No obstante, en E se acusa la ausencia de tareas que promuevan la investigación en el alumnado.

Respecto a los procedimientos necesarios para resolver los ejercicios, vemos que el más precario es el texto I, pues tiene un alto porcentaje de ejercicios de reproducción, mientras que el porcentaje de tareas de conexión es muy bajo, y el de tareas de reflexión es prácticamente nulo. A este respecto, los textos E y F parecen estar mucho mejor distribuidos, aunque, como podemos ver, las tres monografías analizadas tienen una proporción mayoritaria de tareas de reproducción.

Por otro lado, vemos que el porcentaje de ejercicios resueltos en los textos F e I es muy reducido, en comparación lo que acontece en el texto E. En cuanto al uso de herramientas tecnológicas, vemos como las tareas de los textos I y E por lo general no lo fomentan, lo cual es muy llamativo, teniendo en cuenta el desarrollo tecnológico actual. En nuestra opinión, ejercitar al alumno en el uso de tales herramientas debería de ser ineludible, si bien pudiera ser discutible el marco adecuado para hacerlo.

También cabe mencionar que en el texto F se dejan algunas demostraciones como ejercicios, dando ciertas pautas de ayuda. Vemos que este no es el caso de los textos I y E en los que, si ello ocurre, es para que los alumnos hagan demostraciones casi idénticas a alguna que se acaba de presentar.

En resumen: el texto F prescinde de establecer más resultados teóricos a cambio de trabajar una variedad más amplia de ejercicios, mientras que los textos I y E optan por presentar más resultados teóricos, proponiendo ejercicios de índole más concreta.

d) El resultado de nuestro análisis ¿justificaría los datos reflejados por estudios internacionales, como el Informe PISA, sobre las destrezas de los alumnos de los países en cuestión? ¿Cómo justificar nuestras conclusiones?

A priori, los resultados obtenidos con este análisis invitarían a justificar por qué en el estudio PISA del año 2012, Italia y España obtienen puntuaciones tan cercanas en el ranking Matemáticas (Italia 485 puntos y España 484), mientras que Francia obtiene una valoración superior (de 495 puntos). Sin embargo, si atendemos al correspondiente ranking del Informe PISA del año 2015, ya no serían justificables los resultados (Francia 494 puntos, Italia 490 y España 486, respectivamente). En relación a este hecho, nos vemos en la necesidad de aclarar que, a nuestro entender, la información que proporciona un determinado ranking no debería de usarse para justificar juicios simplistas sobre hechos bastante complejos. Hacerlo es, cuanto menos, poco riguroso y maniqueo, por no decir tendencioso, y en cualquier caso nos parece un error de bulto. Aclaremos igualmente que el objetivo último de esta investigación no es valorar cuál de los enfoques educativos nos parece el más adecuado, ya que el lector contará con su propia opinión al respecto y, sobre todo, nosotros no estamos dispuestos a hacer semejante juicio.

e) ¿Qué fortalezas y deficiencias se podrían identificar en el texto español analizado y en todos los que se consideren semejantes?

A pesar de que, como ya hemos indicado, no pretendemos dar nuestra valoración personal sobre los diferentes textos analizados, sí que hay ciertos hechos más o menos objetivos que nos gustaría enfatizar en este punto del trabajo.

En primer lugar, señalamos ciertos aspectos sobre los que, a la luz de este estudio, deberíamos de reflexionar y que son aplicables en particular al texto español:

- La mezcla de notaciones, incluso en un mismo resultado, es uno de los puntos débiles que hemos encontrado en nuestro análisis. Esto, como ya se ha dicho, es una dificultad añadida para el alumno que intenta instruirse por sí mismo, pues ha de entender estos cambios de notación a la par que las relaciones entre unos objetos matemáticos y otros.
- Nuestro análisis acusa la falta de ejercicios que fomenten un uso cualitativo de las herramientas tecnológicas (que pueden ser muy útiles para la motivación del alumnado, comprender la interpretación de ciertos resultados, efectuar algunos cálculos complejos, etc.).

- Las cuestiones relacionadas con el rigor, tanto conceptual como metodológico, siempre han de ser dignas de la máxima consideración, pues una reflexión profunda en torno a ellas siempre proporciona un elemento de mejora en la calidad proceso de enseñanza y aprendizaje. De modo que, por bueno que sea el nivel de rigor alcanzado, siempre es oportuno plantearse cómo mejorarlo.
- Los resultados, por lo general, carecen de ejercicios o problemáticas que los motiven, y creemos que ello debería de tenerse en consideración como elemento de mejora.

Por otro lado, detallamos lo que identificamos como fortalezas del texto español:

- En cuanto a resultados teóricos el texto español, junto con el italiano, es muy completo, pues contiene casi todos los resultados que consideraríamos imprescindibles en un curso introductorio al Cálculo Diferencial.
- El texto español es el que más ejercicios resueltos tiene. Esto es un aspecto muy positivo para los alumnos, pues les facilita trabajar por su propia cuenta.
- Presenta una sección de evaluación de conocimientos iniciales al principio del tema, igual que el texto italiano. Esto es de gran ayuda para los alumnos, pues señala los contenidos que ya deberían conocer, y a la vez los recuerda.

Como nuestro estudio ha mostrado, cada texto presenta una filosofía propia que, de alguna manera, refleja las directrices educativas propias de cada país. Es por ello que es conveniente e interesante conocer de primera mano cómo son los libros de texto con los que se trabaja en los países de nuestro entorno más cercano.

7. Referencias

1. Libros de texto analizados

1. Barozzi, G., Bergamini, M. y Trifone, A. (2012). *Matematica azzurro con Maths in English*. Bari: Zanichelli.
2. Beltramone, J.P., Brun, V., Labrosse, J., Merdy, C., Sidokpohou, O., Talamoni, C. y Truchan, A. (2012). *Déclic Mathématiques Ts. Enseignements spécifiques et de spécialité*. París: Hachette.
3. Colera, J. y Oliveira, M. J. (2012). *Matemáticas II*. Madrid: Anaya.

2. Parte I de este estudio.

Celorrio, M. E., Velasco M.V., Estudio comparativo del Cálculo Diferencial en libros de texto litalianos, franceses y españoles. Parte I. Sometido a publicación.

3. Bibliografía general

1. Alajmi, A.H. (2012). How do elementary textbooks address fractions? A review of mathematics textbooks in the USA, Japan, and Kuwait. *Educational Studies in Mathematics*. *Educational Studies in Mathematics*.79(2), 239-261.
2. Alford, L. E. (1986). Alignment of textbook and test content. *Arithmetic teacher*, 4(3), 25.
3. Azcárate, C. (1990). *La velocidad: introducción al concepto de derivada* (Tesis Doctoral), Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona.
4. Blanco, L. J. (1993a). *Consideraciones elementales sobre la resolución de problemas*. Badajoz: Editorial Universitas.
5. Blanco, L. J. (1993b). Una clasificación de problemas matemáticos. *Épsilon*, 25, 49-60.
6. Blázquez, S., Gatica, N. y Ortega, T. (2009). Análisis de diversas conceptualizaciones de límite funcional. *La Gaceta de la RSME*, 12(1), 145-168.
7. Borasi, R. (1986). On the Nature of Problems. *Educational Studies in Mathematics*, 17 (2), 125 - 41.
8. Bosch, M., Gascón, J. y Sierra, T. (2009). Análisis de los manuales españoles para la formación de maestros: El caso de los sistemas de numeración. En M. J. González, M. T. González, y J. Murillo (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 139-150). Santander: SEIEM.
9. Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique Grupo Editor S.A.
10. Choppin A. (1980) L'histoire des manuels scolaires. Une approche globale. *Histoire de l'éducation*, 9, 1-25.
11. Cockcroft, W. H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
12. Escolano, A. (1997). Introducción. En A. Escolano (Coord.), *Historia Ilustrada del libro escolar en España: del Antiguo Régimen a la Segunda República* (pp. 13-17). Madrid: Ediciones Pirámides.
13. Flores, P. y Rico, L. (2015) *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*. Madrid: Ediciones Pirámide.

14. Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (Tesis Doctoral), Universidad de Granada, Granada.
15. González, M.T. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de Matemáticas. Los puntos críticos en la Enseñanza Secundaria en España en el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(3), 389-408.
16. González-Ruiz, I., Ruiz-Hidalgo, J.F. y Molina, M. (2014). Influencia de los conceptos topológicos en la definición de límite finito de una función en un punto en libros de texto de cálculo. En M. J. González, M. T. González, y J. Murillo (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 385-394). Santander: SEIEM.
17. Ibáñez, I. y Llombart, J. (2001). La comparación de textos en Historia de la Ciencia: una propuesta metodológica. [*Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*](#) 24 (49), 131-148.
18. Janvier, C. (1987). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Londres: Lawrence Earlbaum Associated Publishers.
19. Mastrull S. (2002). *The Mathematics Education of Students in Japan: A Comparison with United States Mathematics Programs*. Bristol Township School District MIC 8 Training. Recuperado el 12 de junio de 2016, de <http://gphillymath.org/ExempPaper/TeacherPresent/Mastrull/SMastrull.pdf>
20. Maz-Machado, A. y Rico, L. (2015) Principios didácticos en texto españoles de matemáticas en los siglos XVIII y XIX. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18 (1), 49-76.
21. Mustafa, M. y Cullingford, C. (2008). Teacher autonomy and centralised control: The case of textbooks. *International Journal of Educational Development*, 28 (1), 81-88.
22. Pino, J. y Blanco, L. J. (2008) Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones*, 38, 63-88.
23. Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *AIEM*, 1, 39-63.
24. Rodríguez, J. (2006). La investigación sobre los libros de texto y materiales curriculares. En *Primer seminario internacional de textos escolares*. Mineduc. Santiago. Recuperado el 17 de junio de 2016, de

http://www.cerlalc.org/libroaldia/libroaldia_8/imagenes/noticias/SITE.pdf

25. Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*. 11 (2), 267-296
26. Schubring, G. (1987). On the methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author. *For the learning of mathematics*, 7 (3), 41-51.
27. Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
28. Sowder L. (1988). Concept-Driven Strategies for Solving Problems in Mathematics (Informe Final de Proyecto), San Diego State Univ. Center for Research in Mathematics and Science Education.
29. Sun, Y., Kulm, G. y Capraro, M. M. (2009). Middle Grade Teachers' Use of Textbooks and Their Classroom Instruction. *Journal of Mathematics Education*, 2 (2), 20-37.
30. Tall, D. (1991). The psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). Dordrecht: Kluwer.
31. Tall, D., Gray, E., Ali, M., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., Pitta, D., Pinto, M. F., Thomas, M. J. y Yusof, Y. B. (2001). Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 1, 81-104.
32. Van Dormolen, J. (1986) Textual Analysis. En Christiansen, B, Howson, A. G. and Otte, M. (Eds.) *Perspectives on Mathematics Education*, (pp. 141-171). Dordrecht: D. Reidel.

4. Referencias web

33. Ministerio de Educación y Ciencia (2014). Descripción del Sistema Educativo Francés. Recuperado el 5 de mayo de 2016, de <http://www.mecd.gob.es/exterior/centros/strasburgo/es/quienessomos/DossierEstrasburgo.pdf>
34. Eurydice (2013). Sistema educativo italiano-Sintesi. Recuperado el 5 de mayo de 2016, de

8. ANEXO I

Para describir la muestra, presentamos la siguiente tabla, tomando como referencia los descriptores externos que se muestran en González-Ruiz, Ruiz-Hidalgo y Molina (2014).

	País	Editorial	Título	Autor	Ciudad	Año
Texto A	España	Anaya	Matemáticas II	José Colera Jiménez Maria José Oliveira González	Madrid	2012
Texto B	Francia	Hachette	Déclic Mathématiques Ts. Enseignements spécifiques et de spécialité.	Jean-Paul Beltramone Vincent Brun Jean Labrosse Claudine Merdy Olivier Sidokpohou Claude Talamoni Alain Truchan	París	2012
Texto C	Italia	Zanichelli	Matematica.Azzurro con Maths in English	Massimo Bergamini Anna Trifone Graziella Barozzi	Bari	2012

Tabla 1. Descripción de la muestra.